1.1- Simulação de v.a's pelo método da transformação Inversa

Geração de v.a's nas uniformes

Objectivo: usar nºs pseudo-aleatórios (nº U(0,1)) para gerar observações de outras distribuições de uma forma rápida

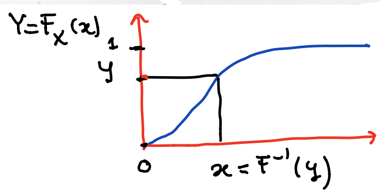
1. Método da transformação Inversa (ou quantile) - 1º vamos ver para v.a's contínuas

teo. da transformação Inversa:
Seja X uma v.a. contínua com f. distribuição $F_X(x)$, então $F(X) \sim U(0,1)$

Dem: Seja $Y = F_X(X)$ com f. distribuição $F_Y(x)$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(F_X(X) \le x) = P(X \le F_X^{-1}(x)) = F_X(F_X^{-1}(x)) = x$$

$x \in [0,1)$ ∴ $Y = F_X(X) \sim U(0,1)$ porque $F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$



Exemplo: $Y = F_X(X) = 1 - e^{-\lambda X}$, $X \in \mathbb{R}^+$ ($X \sim Exp(\lambda)$); $R_Y = [0,1]$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(1 - e^{-\lambda X} \le y) = P(e^{-\lambda X} \ge 1-y) = P(-\lambda X \ge \ln(1-y)) =$$

$$= P\left(X \le -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\lambda}(\ln(1-y))} = 1 - (1-y) = y \checkmark$$

∴ $Y \sim U(0,1)$ $\quad F_X\left(-\frac{\ln(1-y)}{\lambda}\right)$

Como usar este resultado para simular v.a's contínuas nas uniformes?
Seja $U \sim U(0,1)$, então $F(X) = U$ significa que a v.a. $F^{-1}(U)$ tem a mesma distribuição que a v.a. X

Método:
1) obter um valor u a partir da U(0,1)
2) Devolver $x = F^{-1}(u)$

Geração de v.a's univariadas contínuas

- **Exponencial (λ)**

$X \sim Exp(\lambda)$; $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \lambda>0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$; $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

Assim tendo um nº u da dist. $U(0,1)$, fazemos:

$$1-e^{-\lambda x} = u \iff x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-u)$$

Isto ainda pode ser simplificado porque:

Se $U \sim U(0,1)$ então $(1-U) \sim U(0,1)$

Dem: $Y = (1-U)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1-U \leq y) = P(-U \leq y-1) = P(U \geq 1-y) =$$
$$= 1 - F_U(1-y) = 1-(1-y) = y \quad \therefore \quad (1-U) \sim U(0,1)$$

Assim, $x = \frac{-\ln u}{\lambda}$ é um valor da dist. $Exp(\lambda)$

- **Weibull (α,λ)**

$X \sim W(\alpha,\lambda)$; $F_X(x) = 1-e^{-(\lambda x)^\alpha}$, $x>0, \lambda,\alpha>0$

$$1-e^{-(\lambda x)^\alpha} = u \iff e^{-(\lambda x)^\alpha} = 1-u \iff -(\lambda x)^\alpha = \ln(1-u) \iff$$
$$\iff \lambda x = (-\ln(1-u))^{1/\alpha} \iff x = \frac{(-\ln(1-u))^{1/\alpha}}{\lambda}$$

que pode ser simplificado em $x = \frac{(-\ln u)^{1/\alpha}}{\lambda}$

- **Gama (n,λ) ≡ Erlang (n,λ)**

$X \sim G(n,\lambda)$; $F_X(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} dy$ a que não tem uma forma explícita

Mas $X \sim G(n,\lambda) \Leftrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \underset{\text{indep}}{\sim} Exp(\lambda)$

temos que ter $u_1, \dots, u_n$

Assim $x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \ln(U_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)$

- **Qui-quadrado $(2n)$**

$X \sim \chi^2_{(2n)} \Leftrightarrow (2\lambda Y) \sim \chi^2_{(2n)}$ se $Y \sim G(n,\lambda)$

Assim $x = -2 \ln \prod_{i=1}^{n} U_i$

$\chi^2_{(3)} = \chi^2_{(2)} + \chi^2_{(1)}$ ← $(N(0,1))^2$

indep

- **Dist. Normal**

Não tem uma forma explícita para a f. distribuição e a técnica da soma também não funciona (uma Normal só surge como a soma de Normais Indep.)

Métodos especiais para simulação da Normal

1) Simulação direta (usando o T.L.C.)

$U_i \underset{\text{i.i.d.}}{\sim} U(0,1)$, $E(U_i) = \frac{1}{2}$ e $var(U_i) = \frac{1}{12}$

$Y = \sum_{i=1}^{n} U_i$ com $E(Y) = \frac{n}{2}$ e $var(Y) = \frac{n}{12}$, pelo T.L.C.

$Z = \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{var(Y)}} = \frac{Y - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \underset{a}{\sim} N(0,1)$ → para $n \geq 12$ já é válida a convergência para a $N(0,1)$

Escolhendo $n = 12$, vem $Z = Y - 6 = \left(\sum_{i=1}^{12} U_i - 6\right) \underset{a}{\sim} N(0,1)$

Assim : 1) Geram-se 12 nº pseudo-aleatórios Indep. $u_1, \dots, u_{12}$

2) Efectuando a atribuição $z = \sum_{i=1}^{12} u_i - 6$

obtém-se uma observação de $Z \underset{a}{\sim} N(0,1)$

De notar que $z \in (-6, 6)$ mas $P(|Z| \geq 6) \simeq 10^{-10}$

2) Método de Box-Müller (ver, por ex., Ross de P. E. secção 15.6.1)

Baseia-se no resultado

se $U_i \sim U(0,1)$, $i=1,2$ então
i.i.d.

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2) \sim N(0,1) \quad , \; Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$$

$$Z_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

utiliza-se uma das duas expressões para gerar 1 valor da $N(0,1)$

Geração de v.a's multivariadas contínuas (só a normal multivariada)

- **Distribuição Normal K-variada**

$$\underset{\sim}{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} \qquad X \text{ (bold)}$$

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_K) \rightarrow$ vector Aleatório em $\mathbb{R}^K$

$E(X_i) = \mu_i$

$$E(\underset{\sim}{X}) = E\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_K \end{bmatrix} = \underset{\sim}{\mu} \text{ (vector média)}$$

$VAR(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{\Sigma}$ matriz de variâncias-covariâncias de $\underset{\sim}{X}$

de covariâncias

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ \vdots \\ \\ X_K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \dots & X_K \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1K} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2K} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{K1} & \dots & & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$cov(X_1, X_1) = var(X_1) = \sigma_1^2 = \sigma_{11}$

$cov(X_1, X_2) = \sigma_{12} = cov(X_2, X_1)$

$\underset{\sim}{\Sigma}$ é uma matriz simétrica e definida positiva (d.p.)

vamos partir da f.d.p. da Normal univariada e vamos ver como a generalizar para o caso K-variado

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$

No expoente o termo $\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$

1 $(x-\mu)(\sigma^2)^{-1}(x-\mu)$

generalizando para $\mathbb{R}^k$ $\downarrow$

$(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})^T \underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) = \Delta^2$

$\Delta \rightarrow$ distância de Mahalanobis

$\mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^k$

$(2\pi)^{-1/2} \longrightarrow (2\pi)^{-k/2}$ $\qquad$ $|\underset{\sim}{\Sigma}| \rightarrow$ variância generalizada

$(\sigma^2)^{-1/2} \longrightarrow |\underset{\sim}{\Sigma}|^{-1/2}$ $\qquad$ $tr(\underset{\sim}{\Sigma}) \rightarrow$ variância total

Assim se $\underset{\sim}{X} \sim N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ a sua f.d.p. é:

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2} = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}|\underset{\sim}{\Sigma}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})^T\underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})},$$

$\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$, $\underset{\sim}{\mu} \in \mathbb{R}^k$

$\underset{\sim}{\Sigma} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ simétrica e definida positiva

- Caso Particular - Normal bivariada

$\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

1) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ $\qquad f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x_1-\mu_1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x_2-\mu_2)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\sigma_1^2\sigma_2^2)^{1/2}} e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ e $(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})^T \underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) = \frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$

$\Sigma^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$ $\qquad |\underset{\sim}{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2$

2) $X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|\underset{\sim}{\Sigma}| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$\rho = \frac{cov(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{|\underset{\sim}{\Sigma}|}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-\rho^2)}\begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{12} = \rho\,\sigma_1\sigma_2$$

$$\Delta^2 = (\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu})^T \underset{\sim}{\Sigma}^{-1}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\mu}) = \dots$$

$$= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

$\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

$$f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

, $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^2$, $\underset{\sim}{\mu} \in \mathbb{R}^2$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$ e $|\rho|<1$

Propriedades: $\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

1. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $i=1,2$ (também é válido para a Normal K-variada)

2. $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \iff cov(X_1,X_2)=0$ $(\rho=0)$

no caso de dist. Normal é equivalente

$\underset{\sim}{\Sigma}$ = Diagonal! $= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y$ então $cov(X,Y)=0$

- $cov(X,Y)=0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Prop.

3. $\underset{\sim}{X} \sim N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ $\quad \underset{\sim}{X} \in \mathbb{R}^k$

$\underset{\sim}{\Sigma}$ matriz simétrica

$\underset{\sim}{\gamma}_1, \dots, \underset{\sim}{\gamma}_k \to$ vector próprios de $\underset{\sim}{\Sigma}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \to$ valor próprios de $\underset{\sim}{\Sigma}$

ortogonal

$$\underset{\sim}{\Gamma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underset{\sim}{\gamma}_1 & \underset{\sim}{\gamma}_2 & \dots & \underset{\sim}{\gamma}_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \gamma_{11} & & & \gamma_{k1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{1k} & & & \gamma_{kk} \end{bmatrix}_{k \times k} \end{array}$$

$$\underset{\sim}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\Gamma}\, \underset{\sim}{\Lambda}\, \underset{\sim}{\Gamma}^T =$$

$$= \underbrace{\underset{\sim}{\Gamma}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}}_{\underset{\sim}{C}}\ \underbrace{\underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\, \underset{\sim}{\Gamma}^T}_{\underset{\sim}{C}^T} = \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{C}^T =$$

$\underset{\sim}{X} \sim N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ $\qquad \underset{\sim}{Z} \sim N_k(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{I})$

$$\underset{\sim}{X} \sim N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma}) \iff \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{\mu} + \underset{\sim}{\Gamma}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\, \underset{\sim}{Z}$$

se $\underset{\sim}{X} \sim N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$ então $\underset{\sim}{Z} = \Big(\underbrace{\underset{\sim}{\Sigma}^{-1/2}}_{\underset{\sim}{\Gamma}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{-1/2}} (\underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{\mu}) \Big) \sim N_k(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{I})$

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{1/2} = \underset{\sim}{\Gamma}\, \underset{\sim}{\Lambda}^{1/2}\, \underset{\sim}{\Gamma}^T = \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{\Gamma}^T$$

4. $\underset{\sim}{X} \sim N_2(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

Para $|\rho| < 1$, $(X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2) ; \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$

Dem: $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1|X_2=x_2}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$ sabemos isto

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2}$$

$$\Delta^2 = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

reescrever Δ^2 de forma a criar o termo da f.d.p. marginal de X_2, i.e., $\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$

Somar e subtrair $\rho^2\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$

$$\Delta^2 = \frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right)^2 + (1-\rho^2)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-\rho^2)}\left\{\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]^2\right\} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\underset{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2\pi}}{2\pi}\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} e^{-\underbrace{\frac{1}{2(1-\rho^2)}}_{\text{variância}}\left\{\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) - \rho\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right\}^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}}_{\substack{\text{f.d.p. marginal de } X_2 \\ N(\mu_2, \sigma_2^2)}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\underbrace{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}_{\text{desvio padrão } X_1|X_2=x_2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left[x_1 - \underbrace{\left[\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right]}_{\text{(valor médio)}}\right]^2}}_{\text{f.d.p. } X_1|X_2=x_2}$$

$E[X_1 | X_2 = x_2] = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2)$

$\therefore (X_1 | X_2 = x_2) \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2) ; \sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$

- Função geradora de Momentos da Normal k-variada

Se $Z_i \sim N(0,1)$ iid. então $\underset{\sim}{Z} = (Z_1, \dots, Z_n) \sim N_k(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{I})$

$$f_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \underbrace{|\underset{\sim}{I}|}_{1}} e^{-\frac{1}{2}\Delta^2} \quad ; \quad \Delta^2 = (\underset{\sim}{z} - \underset{\sim}{0})^T \underset{\sim}{I} (\underset{\sim}{z} - \underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{z}^T \underset{\sim}{z}$$

$|\underset{\sim}{I}|$

$$f_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} e^{-\frac{1}{2}\underset{\sim}{z}^T \underset{\sim}{z}}, \quad \underset{\sim}{z} \in \mathbb{R}^k$$

$$M_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{t}) = E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{Z}}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{k} e^{t_i z_i}\right) \underset{\substack{Z_i \perp\!\!\!\perp Z_j \\ \forall i \neq j}}{=} \prod_{i=1}^{k} E\left(e^{t_i z_i}\right) =$$

$$M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right)$$
$Z \in \mathbb{R}$ def

$$\underset{\text{i.d.}}{=} \prod_{i=1}^{n} M_Z(t_i)$$

$$\boxed{M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right) = e^{1/2\, t^2}}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} e^{1/2\, t_i^2} = e^{1/2 \sum_{i=1}^{k} t_i^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} t_i^2 = \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{t} \qquad \underset{\text{notação vectorial}}{=} e^{1/2\, \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{t}}$$

como obter a f.g.m. de $N_k(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{\mu} \quad ; \quad \underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{C}^T$$

$$M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) = E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{X}}\right) = E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T (\underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{\mu})}\right) =$$

$$= E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{Z} + \underline{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu}}}\right) = e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu}} E\left(e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{Z}}\right)$$

$$= e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu}} E\left(e^{(\underset{\sim}{C}^T \underset{\sim}{t})^T \underset{\sim}{Z}}\right) = e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu}} M_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{C}^T \underset{\sim}{t})$$

$$= e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu}}\, e^{1/2\, \underset{\sim}{t}^T \underbrace{\underset{\sim}{C}\, \underset{\sim}{C}^T}_{\underset{\sim}{\Sigma}} \underset{\sim}{t}} =$$

$$M_{\underset{\sim}{Z}}(\underset{\sim}{t}) = e^{1/2\, \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{t}}$$

$$= e^{\underset{\sim}{t}\underset{\sim}{\mu}} \, e^{1/2 \, \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{t}} =$$

$$= \boxed{e^{\underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\mu} + 1/2 \, \underset{\sim}{t}^T \underset{\sim}{\Sigma} \underset{\sim}{t}}} \quad \text{f.g.m. } N_K(\underset{\sim}{\mu}, \underset{\sim}{\Sigma})$$

f.g.m. Normal univariada

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

- Geração de valores de Normal K-variada

$Z_i \sim N(0,1)$, $i, \ldots, K$
i.i.d.

$\underset{\sim}{Z} \sim N_K(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{I})$

$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{C} \, \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{\mu}$, com $\underset{\sim}{C} \, \underset{\sim}{C}^T = \underset{\sim}{\Sigma}$

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{\Delta} \underset{\sim}{T}^T = \underbrace{\underset{\sim}{T} \underset{\sim}{\Delta}^{1/2}}_{\underset{\sim}{C}} \underset{\sim}{\Delta}^{1/2} \underset{\sim}{T}^T$$

$\underset{\sim}{\Sigma}$ simétrica de definida positiva

$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{\Delta} \underset{\sim}{T}^T$

$\underset{\sim}{T}_{K \times K}$ → ortogonal (K-vectores próprios de $\underset{\sim}{\Sigma}$)

$\underset{\sim}{\Delta} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_K)$

λ_i → i-ésimo valor próprio de $\underset{\sim}{\Sigma}$

1) gerar $z_1, \ldots, z_K$ com o método de Box-Müller, $i = 1, \ldots, K$ (indep)

$\underset{\sim}{z} = (z_1, \ldots, z_K)$ observação de $N_K(\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{I})$

2) Fazer $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{C} \, \underset{\sim}{z} + \underset{\sim}{\mu}$ com $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{\Delta}^{1/2}$

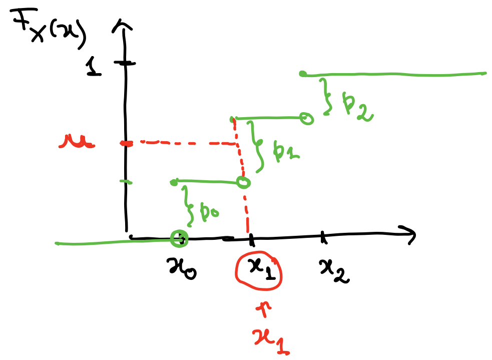
$\underset{\sim}{x} = (x_1, \ldots, x_K)$

1. Método da transformação inversa para simulação de v.a's discretas

X v.a. discreta e $F_X(x)$ não é uma função contínua

Pode-se também aplicar o método da transformação inversa para simular v.a's discretas usando a "alteração" (generalização)

$x = F^{-1}(u) = \min\{x : F_X(x) \geq u\}$ com u um valor da $U(0,1)$



X v.a. discreta com f. dist. $F_X(x)$ e funç. de Prob. $P(X=x_j)=p_j,\ j=0,1,\dots$

$$X=\begin{cases} x_0 & \text{se } U<p_0 \\ x_1 & \text{se } p_0\le U<p_1 \\ \vdots & \\ x_j & \text{se } \sum_{i=0}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{j} p_i \end{cases}$$

Algoritmo:

1) Gerar u da $U(0,1)$

2) Devolver $x=x_j$ se $\sum_{i=0}^{j-1} p_i \le u < \sum_{i=0}^{j} p_i$, ie

se $F_X(x_{j-1}) \le u < F_X(x_j)$

Note-se que: $P(X=x_j)=P\left(\sum_{i=0}^{j-1} p_i \le U < \sum_{i=0}^{j} p_i\right)=p_j$ como se pretendia!

Simulação de v.a's discretas usando o método da transformação inversa (quantile)

- Uniforme discreta em $\{1,\dots,n\}$

$X \sim \text{Unif}\{1,2,\dots,n\}$

$$P(X=i)=\begin{cases} 1/n, & i\in\{1,2,\dots,n\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$F_X(j-1)=\frac{j-1}{n}$; Assim $x=j$ se $\frac{j-1}{n}\le u<\frac{j}{n} \iff$

$F_X(j)=\frac{j}{n}$ $\iff j-1\le nu<j$

ie $x = j \iff x = [nu] + 1 = \lceil nu \rceil$

escrevendo à custa de u

$[\cdot] \to$ parte inteira

$\lceil \ \rceil \to$ tecto

Ex: $X \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots, 6\}$

Gerar u; $u = 0.7$ (suponho)

$F_X(4) = \frac{4}{6} = 0.(6)$ $\quad F_X(4) \leq u = 0.7 < F_X(5)$

$F_X(5) = 5/6 = 0.8(3)$

$x = [6 \times 0.7] + 1 = [4.2] + 1$

$= 4 + 1 = 5$

- Bernoulli (p)

$X \sim \text{Ber}(p)$; $R_X = \{0, 1\}$

$x = 0$ se $U < p_0 = (1-p)$

$U < (1-p)$

$\iff 1 - U > p \iff U > p$

$(1-U) \sim U(0,1)$

$\therefore X = \begin{cases} 0 & \text{se } U > p \\ 1 & \text{se } U \leq p \end{cases}$

- Binomial (n, p) ; $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Método 1: Gerar n n.ºs pseudo-aleatórios $\text{Ber}(p)$ e de seguida contabilizar o n.º de sucessos

1) Gerar n nºs indep $u_1, \dots, u_n$ da $U(0,1)$

2) Efectuar a atribuição

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{se } u_i > p \\ 1 & \text{se } u_i \leq p \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Método 2 (requer apenas a geração de um nº u da $U(0,1)$)

Baseia-se no facto de que se $U \sim U(0,1)$ então

1) Dado $U \leq p$ tem-se $(U \mid U \leq p) \sim U(0,p)$

2) Dado $U > p$ tem-se $(U \mid U > p) \sim U(p,1)$

Dem 1) : $0 < u \leq p$

$$P(U \leq u \mid U \leq p) = \frac{P(U \leq u, U \leq p)}{P(U \leq p)} = \frac{P(U \leq u)}{P(U \leq p)} = \frac{u}{p} \therefore$$

$$(U \mid U \leq p) \sim U(0,p)$$

Algoritmo:

1. Gerar um nº u da $U(0,1)$
2. Iniciar $K = 0$
3. $K = K + 1$
4. Se $u \leq p \Rightarrow \begin{cases} y_K = 1 \\ \text{substituir } u \text{ por } \frac{u}{p} \end{cases}$ obs: $\left(\frac{U}{p} \middle| U \leq p\right) \sim U(0,1)$
5. Se $u > p \Rightarrow \begin{cases} y_K = 0 \\ \text{substituir } u \text{ por } \frac{u-p}{1-p} \end{cases}$ obs: $\left(\frac{U-p}{1-p} \middle| U > p\right) \sim U(0,1)$
6. Se $K = n$ saída $x = \sum_{i=1}^{n} y_K$ e parar
7. Ir para passo 3.

- **Geométrica : $X \sim Geo(p)$**

$$p_j = P(X=j) = p(1-p)^{j-1} \quad ; j=1,2,\dots$$

$$F_X(j-1) = P(X \leq j-1) = 1 - P(X > j-1)$$
$$= 1 - P(\text{'1}^{\text{os}}\ (j-1)\text{ provas serem insucessos'})$$
$$= 1-(1-p)^{j-1} \qquad j \in \{1,2,\dots\}$$

$$F_X(j) = 1-(1-p)^j$$

$$F_X(j-1) \leq U < F_X(j) \Leftrightarrow 1-(1-p)^{j-1} \leq U < 1-(1-p)^j \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-p)^j < 1-U \leq (1-p)^{j-1}$$

X é o 1º j : $(1-p)^j < 1-U$

i.e. $X = \min\{ j : (1-p)^j < 1-U\}$

Aplicando Logaritmo, tem-se

$$X = \min\{ j : j\underbrace{\ln(1-p)}_{<0} < \ln(1-U)\}$$
$$= \min\left\{ j : j > \frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right\} \qquad (1-U) \sim U(0,1)$$

Assim $\quad X = \left\lfloor \dfrac{\ln(U)}{\ln(1-p)} \right\rfloor + 1$

- **Binomial Negativa** - Generalização Dist. Geométrica

Condições da Expª Aleatória : $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ Sucessão de provas de Bernoulli Indep} \\ \bullet\ P(\underbrace{\text{'sucesso'}}_{A_i}) = p ;\ \text{Constante} : p = P(A_i) \end{array}\right.$

X = 'v.a. nº de provas até obter $\underline{r}$ sucessos'

$P(X=x) = P($' na prova $\underline{x}$ ocorreu sucesso e nas $(x-1)$ provas anteriores ocorreram $(r-1)$ sucessos'$)$

A_i = 'i-ésima prova é sucesso' $P(A_i) = p, \forall i$

Uma possibilidade (sem contar com a ordem)

$$B = \underbrace{A_1 A_2 \cdots A_{r-1}}_{r-1} \underbrace{\bar{A}_r \cdots \bar{A}_{x-1}}_{x-r} \boxed{A_x} \quad \text{fixo}$$

$$P(B) = \underbrace{p \times p \times \cdots \times p}_{r-1} \times \underbrace{(1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{x-r} \times p$$

$$P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^{r}, \quad x = r, r+1, \ldots$$

$X \sim BN(r, p)$

Esta v.a. tem esta designação porque:

Binomial	Binomial Negativa
* fixo o nº de provas	* fixo o nº de sucessos
* conta-se o nº de sucessos	* conta-se o nº de provas

Esta v.a. não tem f. dist. tabelada. No entanto, existe relação com a dist. Binomial.

W = 'v.a. nº de sucessos em $(x-1)$ provas'

$W \sim Bin(x-1, p)$

$$P(X=x) = P(W=r-1)\cdot p =$$

$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{x-\cancel{1}-(r-\cancel{1})} \cdot p =$$

$$= \binom{x-1}{r-1} p^{r} (1-p)^{x-r} \quad , x = r, r+1, \dots$$

Além disso se $X \sim BN(r,p)$

$$\underbrace{P(X \le n)}_{\text{são necessárias } n \text{ ou menos provas para obter } \underline{r} \text{ sucessos}} = P(\underbrace{Y \ge r}) \qquad Y \sim Bin(n,p)$$

nº de sucessos em $\underline{n}$ provas é no mínimo r

observações:

1) $r=1$, i.e. $X \sim BN(1,p) \Leftrightarrow X \sim Geo(p)$

2) $W_i \underset{\text{i.i.d.}}{\sim} Geo(p)$, $i=1,\dots,r$ então $X = \sum_{i=1}^{r} W_i \sim BN(r,p)$

Dem: f.g.p.

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{r} W_i\right) \underset{\text{op. linear}}{=} \sum_{i=1}^{r} E(W_i) \underset{\text{i.d.}}{=} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{E(W)}_{\frac{1}{p}} = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \dots \underset{\text{i.i.d.}}{=} \sum_{i=1}^{r} \underbrace{Var(W)}_{\frac{1-p}{p^2}} = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$P_W(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

$$P_X(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^r$$

3) $X \sim BN(r,p)$ e $Y \sim BN(s,p)$ com $X \perp\!\!\!\perp Y$

$(X+Y) \sim BN(r+s; p)$

Definição Alternativa

$Y =$ ' v.a. nº de insucessos até obter r sucessos'

$$X = Y + \overset{\text{nº de sucessos}}{r}$$

X ↓ nº de provas; Y ↓ nº de insucessos

$$R_Y = \{0, 1, \dots\}$$

Assim: $Y = X - r$

$$P(Y = y) = P(X = \underbrace{y + r}_{x}) = \binom{y+r-1}{r-1} p^r (1-p)^{y+\cancel{r}-\cancel{r}}$$

$$= \binom{y+r-1}{r-1} p^r (1-p)^y \quad , y \in \mathbb{N}_0$$

$$E(Y) = E(X - r) = E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$var(Y) = var(X - r) = var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Algoritmo: usando 2) criar um algoritmo semelhante ao da Binomial (Método 1).

- **Poisson : $X \sim Poi(\lambda)$**

$$p_i = P(X = i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \quad , i = 0, 1, \dots \quad , \lambda > 0$$

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{\frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{\lambda^i}{i!}} = \frac{\lambda}{(i+1)} \quad \therefore \quad p_{i+1} = \frac{\lambda}{(i+1)} p_i \quad i \in \{0, 1, \dots\}$$

$$p_0 = P(X=0) = e^{-\lambda}$$

$$p_1 = P(X=1) = \lambda e^{-\lambda} = p_0 \lambda$$

$$p_2 = P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda.\lambda}{2!} = p_1 \frac{\lambda}{2!}$$

$\vdots$

Algoritmo:

1. Gerar u da $U(0,1)$
2. $i=0$, $p=e^{-\lambda}$, $F=p$
3. se $U<F$ atribuir $x=i$ e Parar
4. $p=\frac{\lambda p}{(i+1)}$; $F=F+p$; $i=i+1$;
5. Ir para o passo 3.

Geração de v.a's discretas multivariadas (só a dist. Multinomial)

- Multinomial

Generalização da dist. Binomial para mais do que duas categorias. Admite-se que se realizam n provas de Bernoulli indep. e que em cada prova há K resultados possíveis $A_1, \dots, A_K$ com prob. constantes ao longo das n provas, ie

$P(A_i) = p_i$, $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$ e $n = \sum_{i=1}^{K} x_i$ onde

$x_i =$ ' v.a. nº de ocorrências de A_i nas n provas' $i=1,\dots,K$

Qual é a dist. conjunta (funcção de prob. conjunta) do vector $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_K)$?

Vamos ver um exemplo:

Num processo de controlo de qualidade onde os elementos podem ter $\underline{3}$ tipo de defeito (indep):

Leves (A_1), médio (A_2) ou grave (A_3).

Qual é a prob. de nos próximos $\underline{3}$ elementos c/ defeito haver exactamente $\underline{1}$ com defeito grave?

Sejam: $P(A_1) = 0.7$; $P(A_2) = 0.2$; $P(A_3) = 0.1$.

X_1 = ' v.a. nº de elementos c/ def. A_1 em $\underline{3}$ elementos'

X_2 = ' " " " A_2 em " " '

X_3 = ' " " " A_3 em " " '

Os defeitos possíveis nos $\underline{3}$ elementos, sem ter em conta a ordem, são:

$A_1 A_1 A_3$; $A_1 A_2 A_3$; $A_2 A_2 A_3$

$P(A_1 A_1 A_3) = 0.7^2 \times 0.1$

nº de maneiras $\neq$s que pode surgir: $\binom{3}{2}\binom{1}{1}$

$$\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{3!}{2!\,2!}\,\frac{1!}{1!\,0!} = \frac{3!}{2!\,1!\,0!}$$

Assim:

$$P(X_1=2, X_2=0, X_3=1) = \boxed{\frac{3!}{\underset{x_1}{2!}\,\underset{x_2}{0!}\,\underset{x_3}{1!}}}\, 0.7^2 \times 0.2^0 \times 0.1^1$$

$$P(X_1=0, X_2=2, X_3=1) = \frac{3!}{0!\,2!\,1!}\, 0.7^0 \times 0.2^2 \times 0.1^1$$

$\vdots$

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2, X_3=x_3) = \frac{3!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}\, 0.7^{x_1}\, 0.2^{x_2}\, 0.1^{x_3},$$

se $x_i = 0, \dots, 3$; $\sum_{i=1}^{3} x_i = 3$

Caso geral: função de prob. do vector $\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_K)$

$$P(\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x_1! \cdots x_K!}\, p_1^{x_1} \times \cdots \times p_K^{x_K}, & \sum_{i=1}^{K} x_i = n \,;\, \sum_{i=1}^{K} p_i = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{X} \sim \text{Mult}(n; \underset{\sim}{p}) \qquad \underset{\sim}{p} = (p_1, \dots, p_K)$$

Tal como acontece com a Binomial uma destas variáveis é redundante

Pode-se reescrever a f. p. conjunta na forma

$$P(X_1=x_1, \ldots, X_{k-1}=x_{k-1}) = \frac{n!}{x_1!\,x_2! \times \ldots \times x_{k-1}!\,(n-\sum_{i=1}^{k-1} x_i)!} \times$$

$$\times\, p_1^{x_1} \times \ldots \times p_{k-1}^{x_{k-1}} \left(1-\sum_{i=1}^{k-1} p_i\right)^{(n-\sum_{i=1}^{k-1} x_i)}$$

Propriedades

1. As dist. marginais univariadas são Binomiais

   $X_i \sim Bin(n, p_i)$ $E(X_i) = n p_i$; $var(X_i) = n p_i (1-p_i)$

2. As dist. marginais multivariadas (2 ou + componentes)

$$P(X_i=x_i, X_j=x_j) = \frac{n!}{x_i!\,x_j!\,(n-x_i-x_j)!}\, p_i^{x_i}\, p_j^{x_j}\, (1-p_i-p_j)^{n-x_i-x_j}$$

3. $cov(X_i, X_j) = -n p_i p_j \quad i \neq j$

(Aula prática)

Passo para a Dem.

X_i = 'v.a. nº de ocorrências de A_i nas n provas'

X_j = ' " " " A_j " " " '

α -> ésima prova e $I_{\alpha i} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha\text{-ésima prova ocorre } A_i \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$I_{\alpha j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha\text{-ésima prova ocorre } A_j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$X_i = \sum_{\alpha=1}^{n} I_{\alpha i}$; $X_j = \sum_{\beta=1}^{n} I_{\beta j}$

$cov(I_{\alpha i}, I_{\alpha j})$ obter este valor

$cov(X_i, X_j)$

4. As dist. condicionadas de qualquer subconjunto de variáveis por qualquer subconjunto de variáveis são também multinomiais (Binomiais)

Por exemplo:

$$P(X_i = x_i \mid X_j = x_j) = \frac{P(X_i = x_i, X_j = x_j)}{P(X_j = x_j)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{n}!}{x_i!\,\cancel{x_j}!\,(n-x_i-x_j)!} p_i^{x_i} p_j^{x_j} (1-p_i-p_j)^{n-x_i-x_j}}{\dfrac{\cancel{n}!}{\cancel{x_j}!\,(n-x_j)!} p_j^{x_j} (1-p_j)^{n-x_j}} =$$

$$= \frac{(n-x_j)!}{x_i!\,(n-x_i-x_j)!} \left(\frac{p_i}{(1-p_j)}\right)^{x_i} \left(\frac{1-p_i-p_j}{\underbrace{1-p_j}}\right)^{n-x_i-x_j}$$

$$= \frac{(n-x_j)!}{x_i!\,(n-x_i-x_j)!} \left(\frac{p_i}{1-p_j}\right)^{x_i} \left(1-\frac{p_i}{1-p_j}\right)^{n-x_i-x_j}$$

$$\therefore \left(X_i \mid X_j = x_j\right) \sim Bin\left(n-x_j;\ \frac{p_i}{1-p_j}\right)$$

Funcão geradora de Probabilidades

$P_X(s) \underset{def}{=} E(s^X)$

1. teo Binomial

$\forall x, y$ e $n \geq 1$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

2. teo. multinomial

$\forall x_1, \dots, x_k$ e $n \geq 1$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \times \dots \times x_k^{n_k},$$

onde $\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = \binom{n}{\underset{\sim}{n}}$

Função Geradora de Probabilidades (caso multivariado)

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_k)$; $\underset{\sim}{s} = (s_1, \dots, s_k)$

$$P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{s}) \underset{\text{def}}{=} E(s_1^{X_1} \cdot s_2^{X_2} \times \dots \times s_k^{X_k})$$

$\underset{\sim}{X} \sim MN(n, \underset{\sim}{p})$, qual a f.g.p. de $\underset{\sim}{X}$?

$$P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{s}) = E(s_1^{X_1} \times \dots \times s_k^{X_k})$$

$$= \sum_{x_1 + \dots + x_k = n} \binom{n}{\underset{\sim}{x}} s_1^{x_1} \times \dots \times s_k^{x_k} \, p_1^{x_1} \times \dots \times p_k^{x_k}$$

$$= \sum_{x_1 + \dots + x_k = n} \binom{n}{\underset{\sim}{x}} (s_1 p_1)^{x_1} (s_2 p_2)^{x_2} \times \dots \times (s_k p_k)^{x_k}$$

$$= (s_1 p_1 + s_2 p_2 + \dots + s_k p_k)^n$$

teo. multinomial

Como simular um valor de $\underset{\sim}{x}$ da dist. Multinomial?

$$P(\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{x}) = \binom{n}{\underset{\sim}{x}} p_1^{x_1} \times \dots \times p_k^{x_k}, \quad \sum_{i=1}^{k} x_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

$(x_1, \dots, x_k)$?

Sabemos que: $X_1 \sim Bin(n, p_1)$

$$(X_2 \mid X_1 = x_1) \sim Bin\left(n - x_1, \frac{p_2}{1-p_1}\right)$$

O valor do vetor $\underset{\sim}{x}$ pode ser obtido com uma simulação sequencial. Inicialmente gera-se x_1 (valor de Binomial), de seguida x_2 a partir da dist. condicional de $X_2 \mid X_1 = x_1$, depois x_2 a partir da dist. condicional de $(X_3 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2)$

Passos do Algoritmo:

1) Gerar $X_1 \sim Bin(n, p_1)$, por exemplo, usando a soma de $\underline{n}$ Bernoulli's Indep. com parâmetro p_1.

2) De seguida, dado x_1, nas $\underline{n}$ provas A_1 ocorreu x_1 vezes e nas restantes $(n-x_1)$ provas $\underline{A_2}$ pode ocorrer (independente/) com prob. : $P(A_2 / \overline{A_1}) = \frac{p_2}{1-p_1}$

Assim $(X_2 | X_1 = x_1) \sim Bin(n-x_1, \frac{p_2}{1-p_1})$ e x_2 pode ser simulado a partir desta Binomial

3) Nas restantes $(n-x_1-x_2)$ provas A_3 pode ocorrer (Indep.) com prob:

$$P(A_3 / \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{p_3}{1-p_1-p_2} \text{ e}$$

$$(X_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2) \sim Bin\left(n-x_1-x_2, \frac{p_3}{1-p_1-p_2}\right)$$

e assim sucessivamente até $K-1$

$$x_K = n - \sum_{i=1}^{K-1} x_i$$